Kreisel

Bildquelle: https://www.pexels.com/de-de/foto/grunes-und-braunes-spin-top-270949/

Klassenstufe	Oberthemen	Unterthemen	Anforderungsniveau	Durchführungsniveau	Vorbereitung
Sek. 1	Drehbewegung	Präzession	•	• •	10 Minuten

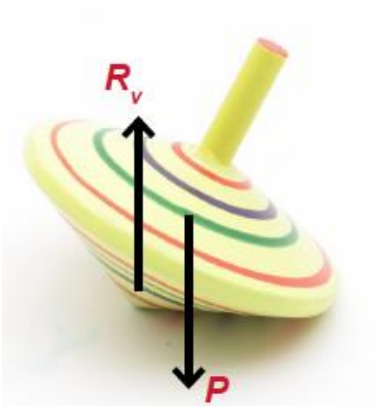
Einführung

Definition Präzessionsbewegung

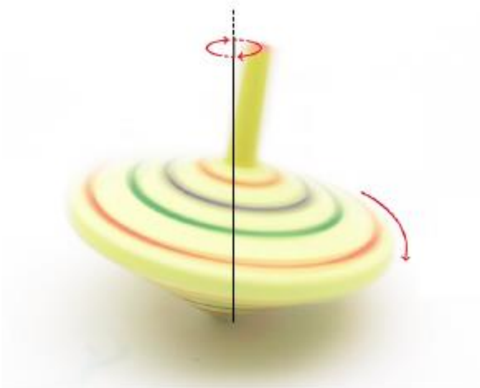
Die Präzession bezeichnet die Richtungsänderung, die die Rotationsachse eines rotierenden Körpers ausführt, wenn eine äußere Kraft ein Drehmoment senkrecht zu dieser Achse ausübt.

Experiment 1

Wenn die Symmetrieachse vollkommen senkrecht zur Ebene steht, wäre das Gleichgewicht des Kreisels in einem instabilen Gleichgerwicht. In der Praxis tritt dieser Zustand jedoch nie auf. Der Kreisel erfährt den Einfluss von zwei Kräften: Die Schwerkraft $\boldsymbol{P}$ und die Auflagekraft $\boldsymbol{R_V}$ im Auflagepunkt. Beide Kräfte sind betragsmäßig gleich, entgegengesetzt und bilden ein Paar. Als Folge kippt der Kreisel.



Wenn sich der Kreisel schnell dreht, fällt er nicht um. Die Drehachse die mit der Symmetrieachse zusammenfällt, ändert die Richtung während ihr oberes Ende einen Kreis beschreibt (Präzessionsbewegung). Nimmt die Drehgeschwindigkeit aufgrund der Reibung ab, erhöht sich die Geschwindigkeit der Präzessionsbewegung so lange, bis der Kreisel kippt.



Experiment 2

Wenn sich das Gyroskop nicht dreht, fällt es aufgrund des mechanischen Moments, das durch sein Gewicht erzeugt wird nach unten. Versetzen Sie nun das Gyroskop mit einer Schnur in schnelle Drehung und setzen es auf das Stativ. Der Kreisel fällt nicht, während der Kreisel sich langsam um seine senkrechte Achse dreht, die durch den Auflagepunkt auf dem Stativ verläuft (Präzessionsbewegung).

Theoretische Betrachtungen : *Rotationsbewegungen mit nicht fester Achse*

1. Impuls

Ein Körper mit der Masse ***m*** bewegt sich mit der Geschwindigkeit ***v***. bei konstanter Geschwindigkeit ist der Impuls ***p*** definiert durch

$$\boldsymbol{p} = m\ \boldsymbol{v} \qquad (1)$$

2. zweites Newton'sches Gesetz

Das zweite Newton'sche Gesetz besagt, dassdie Kraft ***F*** , die auf einen Körper wirkt proportional zu seiner Masse ***m*** und seiner Beschleunigung ***a*** ist:

$$\boldsymbol{F} = m\,\boldsymbol{a}$$

Es gilt

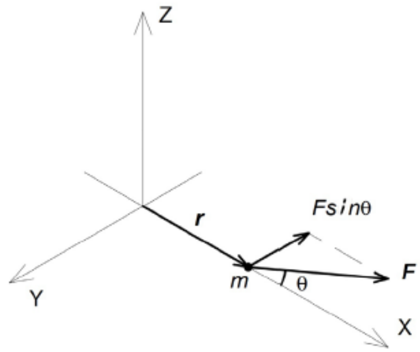
$$\boldsymbol{a} = \frac{d\,\boldsymbol{v}}{d\,t}$$

Somit folgt

$$\boldsymbol{F} = \frac{d\,\boldsymbol{p}}{d\,t} \qquad (2)$$

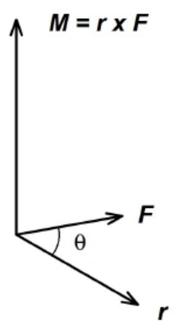
3. **Drehmoment**

An einem Punkt ***P*** eines Körpers wirkt eine Kraft ***F*** . Dessen Richtung im Trägheitssystem ist durch die Richtung ***r*** definiert. Das mechanische Moment (***Drehmomentvektor***) ist durch das folgende Vektor-Produkt charakterisiert:



$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} \qquad (3)$$

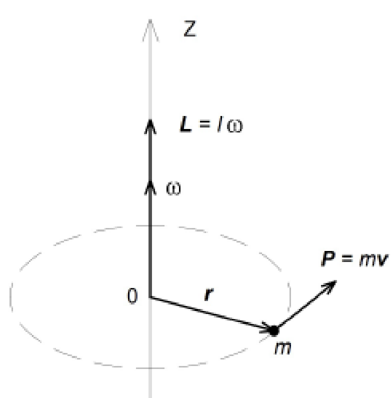
θ ist der Winkel zwischen dem Vektor ***r*** und dem Vektor ***F***. Es gilt, dass das Moment eine Vektorgröße, dessen Betrag ***M = F r sin θ*** ist und dessen Richtung senkrecht zur Ebene steht, die durch die Vektoren ***R*** und ***F*** aufgespannt wird (rechte Hand-Regel). Setzt man Gleichung (2) in (3) ein ergibt sich:



$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} \qquad (4)$$

4. **Drehimpuls einer kreisförmigen Bewegung**

Eine Masse m bewegt sich auf einer Kreisbahn mit Radius r mit einer konstanten geschwindigkeit v. Die folgende vektorielle Größe wird als Drehimpuls bezeichnet.



$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} \qquad (5)$$

für dessen Betrag gilt:

$$L = p\, r \sin\theta$$

Da $\theta = 90°$, gilt $$L = pr = mrv$$

Durch Multiplikation und Division mir r erhalten wir folgende Gleichung

$$L = m\,r^2 \frac{v}{r} \qquad (6)$$

wir definieren

$m\,r^2 = I$ als Trägheitsmoment der Masse

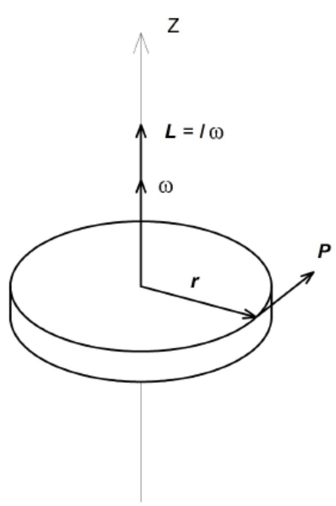
und

$\frac{v}{r} = \omega$ als Winkelgeschwindigkeit der Masse

Gleichung (4) in vektorieller Form dargestellt ergibt:

$$\mathbf{L} = \mathbf{I}\,\boldsymbol{\omega} \qquad (7)$$

Diese Beziehung gilt auch dann, wenn das sich drehende Objekt eine Scheibe ist. In diesem fall ist ***I*** das Trägheitsmoment der Scheibe. Es zeigt die beiden Vektoren ***L*** und ω die gleiche Richtung haben und parallel zur Drehachse stehen.



4. **Die Beziehung zwischen den Vektoren M und L**

Die Geschwindigkeit mit der sich der Drehimpuls ändert ergibt sich durch die Ableitung von Gleichung (5) nach der Zeit.

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p})$$

Durch Ausmultiplizieren erhalten wir

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} \qquad (8)$$

Es gelten $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}$ und $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$. Der erste Term ist null (Vektorprodukt zweier paralleler Vektoren) . Es gilt somit für gleichung (8):

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} \qquad (9)$$

Aus Gleichung (4) folgt somit unmittelbar

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} \qquad (10)$$

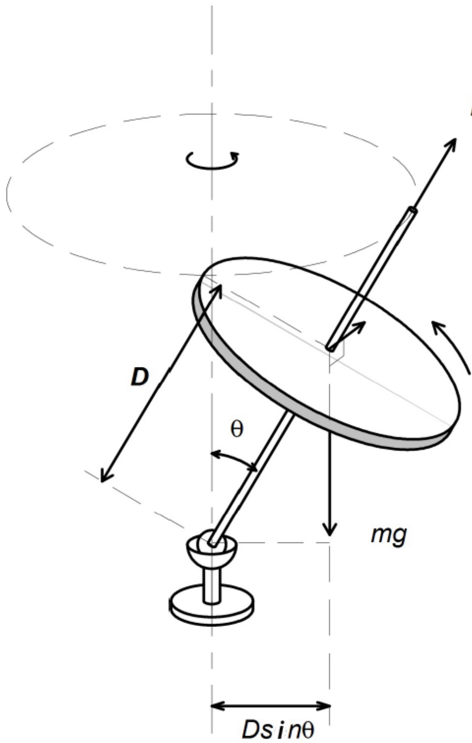
Die bedeutet, dass die Geschwindigkeit, mit der sich der Drehimpuls L zeitlich änder entspricht dem mechanischen Moment M.

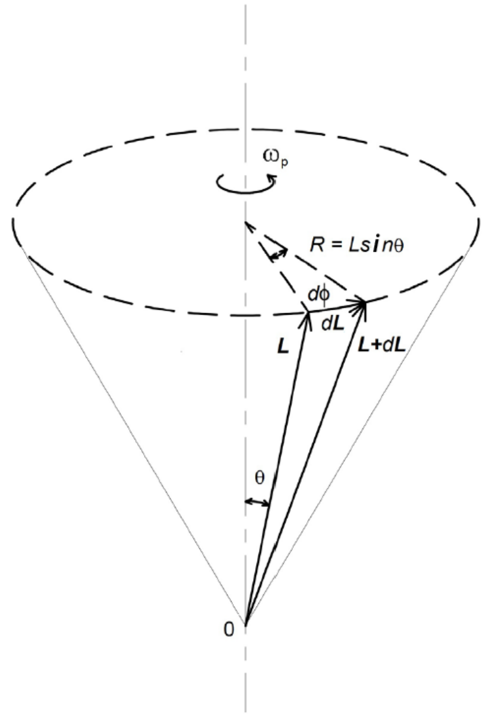
Gleichung (10) - abgeleitet von der klassischen Mechanik - beschreibt die ***Winkelgeschwindigkeit*** ω_p der Präzessionsbewegung.

Winkelgeschwindigkeit der Präzessionsbewegung

Die nachfolgende Abbildung zeigt das Gyroskop mit einer Präzessionsbewegung. Es ist offensichtlich, dass der Drehimpuls L seiner Rotation entlang der Drehachse zugeordnet ist. Das Gewicht ***mg*** des Gyroskopes übt - bedingt durch die Schwerkraft - ein mechanisches Moment auf den Stativfuß im Punkt ***O*** aus, dessen Btrag ist:

$$M = m\,g\,D \sin\theta \qquad (11)$$





Die obere Spitze der Drehachse beschreibt einen Kreis mit dem Radius ***R*** Es gilt:

$$\boldsymbol{R = L \sin \theta}$$

Innerhalb der Zeit ***dt*** erfährt der Drehimpuls eine Änderung ***dL***. Da diese Änderung sehr gering ist und senkrecht zu ***L*** steht und (10) gilt, folgt

$$\boldsymbol{dL = M\, dt}$$

mit (11) gilt

$$\boldsymbol{dL = m\, g\, D \sin \theta} \qquad (12)$$

Definiert man ***dΦ*** als den durch den Radius ***R*** im Zeitintervall ***dt*** überstrichenen Winkel, so gilt:

$$\boldsymbol{dL = R\, d\Phi = L \sin \theta\, d\Phi} \qquad (13)$$

Aus (12) und (13) ergibt sich folgende Gleichung:

$$\boldsymbol{L \sin \theta\, d\Phi = m\, g\, D \sin \theta}$$

Mit $\omega_p = d\Phi/dt$ gilt

$$\omega_p = \frac{m\, g\, D}{L}$$

Gleichung (7) eingesetzt ergibt

$$\omega_p = \frac{m\,g\,D}{I\,\omega} \tag{14}$$

Fazit:
Aus dem bisher gesagten kann man schließen, dass sich die Winkelgeschwindigkeit der Präzession umgekehrt proportional zur Winkelgeschwindigkeit der Rotation verhält.

Gleichung (14) zeigt, dass die Winkelgeschwindigkeit der Präzessionsbewegung unabhängig von der Neigung der Drehachse ist.

Mit nachfolgendem Versuch können Sie diesen Sachverhalt überprüfen.

Experiment 3

Benutzen Sie eine Schnur um das Gyroskop zu starten. Halten Sie das Gyroskop an der Schlitzschraube fest und setzen es auf das Stativ.
Sie werden feststellen, dass die Winkelgeschwindigkeit der Präzision ω_p unabhängig vom Neigungswinkel der Drehachse ist, selbst wenn man den Kreisel horizontal an eine Schnur befestigt. (siehe nachfolgende Abbildungen).

Lassen Sie den Kreisel für eine feste Zeitspanne (z.B***. t = 20 s***) drehen und zählen die Anzahl der Präzessionsdrehungen. Es gilt folgende Gleichung:

$$\omega_p = 2\pi \frac{n}{t} \tag{15}$$